МЕТОДИЧЕСКАЯ НАУКА – УЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 373.5.091.2:51
EDN WPCOXF
DOI: 10.24412/2079-9152-2025-68-61-71

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАВНОСИЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЕ

Бабенко Алена Сергеевна[1],
кандидат педагогических наук, доцент,
Author ID: 808337
ORCID: 0000-0001-6267-0497
e-mail: a_babenko@kosgos.ru
Матыцина Татьяна Николаевна[1],
кандидат физико-математических наук, доцент,
Author ID: 844573
ORCID: 0000-0003-1090-003X
e-mail: t_matycina@kosgos.ru
Задворнова Алиса Сергеевна[2],
e-mail: zadvornova4alisa@gmail.com
[1]*ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, РФ*
[2]*МБОУ «СОШ № 30 г. Костромы», г. Кострома, РФ*

Аннотация. *В данной работе представлены разнообразные равносильные переходы при решении стандартных уравнений и неравенств в школьном курсе математике. Описаны приемы обучения методам решения уравнений и неравенств, которые включают в себя использование цветовой дифференциации, установление взаимосвязи понятий теории множеств, математической логики и понятия «система-совокупность»; рекомендации для учителя о применении равносильных переходов на уроке. В работе приведены основные равносильные переходы, которые можно применять при решении уравнений и неравенств, а также задачи повышенного уровня сложности – задания с параметром. Показаны эффективные способы применения равносильных переходов, которые в некоторых случаях позволяют исключить избыточные условия, тем самым упрощая решение, сокращения время на выполнение задания, что, несомненно, уменьшает количество «шальных» ошибок, возникающих у школьников. Описаны результаты апробации проведенного исследования о внедрение разработанных учебных материалов в образовательный процесс. Исследование проводилось в 10–11 классах в течение двух лет, целью которого было проверить уровень сформированности умения решать уравнения и неравенства у обучающихся. Согласно результатам входного и итогового тестирований учащихся были сделаны выводы о повышении эффективности обучения в классе.*

Ключевые слова: *уравнения, неравенства, математическая логика, теория множеств, цветовая дифференциация, оптимальный равносильный переход.*

Для цитирования: Бабенко, А.С. Использование равносильных переходов при решении уравнений и неравенств в школе / А.С. Бабенко, Т.Н. Матыцина, А.С. Задворнова. – DOI: 10.24412/2079-9152-2025-68-61-71 // Дидактика математики: проблемы и исследования. – 2025. – Вып. 4 (68). – С. 61–71. – EDN WPCOXF.

Введение. Школьный курс математики разнообразный и включает в себя множество практических задач. Подавляющее большинство из этих задач решаются с помощью уравнений и неравенств. При решении алгебраических уравнений (неравенств) часто возникает необходимость преобразовывать исходное выражение таким образом, чтобы упростить процесс нахождения корней уравнения (неравенства). Одним из важнейших инструментов решения являются равносильные преобразования, позволяющее заменить одно уравнение (неравенство) другим, эквивалентным ему. Решение уравнений часто вызывает затруднения у школьников. Из-за слабо сформированного навыка решения уравнений, возникают пробелы в освоении других разделов школьного курса математики. Поэтому важно качественно сформировать данный навык у учащегося с самого начала. Для этого нужно использовать равносильные переходы [3; 17; 18].

Подтверждением данного факта являются результаты единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня по Костромской области. Если с заданием номер шесть (элементарное уравнение) первой части справляются всегда около 90 % участников экзамена, то с заданием пятнадцать (неравенство повышенного уровня сложности) второй части справляются гораздо меньше. Полный балл за это задание получают примерно 15–20 % участников экзамена, согласно данным размещенным в открытом доступе государственным автономным учреждением Костромской области «Региональный центр оценки качества образования «Эксперт»». Исходя из собственного опыта проверки работ с развернутым ответом ЕГЭ по математике можно заметить, что распространёнными ошибками являются:

– неправильное использование символики, записывают систему там, где необходимо ставить знак совокупности;

– неправильное применение равносильных переходов;

– записывают область допустимых значений в неполном объеме (например, ставится ограничение только на подлогарифмическое выражения, не учитывая другие условия).

К чему могут привести ошибки при решении неравенств более подробно изложено в научном исследовании E. Halmaghi [19].

Проблема исследования заключается в повышении эффективности обучения при изучении линии уравнений и неравенств в школе с применением цветовой дифференциации и применением элементов математической логики.

Множество российских и советских ученых занимались вопросами формирования навыка решения уравнений и неравенств: К.И. Нешкова, С.И. Величко, В.А. Гусева, В.В. Давыдов, Г.В. Дорофеев, О.Б. Епишева, Ю.М. Колягина, А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин и др. Методике обучения решению уравнений посвящены работы А.Ш. Блоха, В.А. Гусева, Ю.М. Колягина, Е.Э. Мордкович, Г.И. Саранцева и др.

Проанализировав методическую литературу, хотим отметить, что уже обучающимся 8 класса следует начинать объяснять, как правильно осуществлять равносильный переход (более подробно можно ознакомится в работе Г.И. Саранцева [12]). При этом на первом этапе изучения уравнений мы рекомендуем использовать цветовую дифференциацию, так как применение цветов позволит сделать акценты на важных моментах излагаемого материала, поэтому ученик визуально может легче его запомнить.

Использование цветов в качестве опорных сигналов – эта идея не новая, разработанная В.Ф. Шаталовым. Основная цель применения данных разработок – повысить эффективность учебных занятий [2, с. 90].

Цель статьи – *разработать и апробировать методику изучения уравнений и неравенств в школе с применением цветовой дифференциации и элементов математической логики.*

Материалы и методы. Теоретические методы исследования: анализ психолого-педагогической, научно-методической, научно-математической литературы, обобщение изученного материала. Методы эмпирического исследования: педагогическое наблюдение за деятельностью обучающихся, сбор материала, анализ результатов контрольных работ обучающихся.

Результаты и их обсуждение. Решение любого уравнения или неравенства предполагает пошаговые равносильные переходы. Это означает, что исходное уравнение (неравенство) заменяется на ряд равносильных уравнений (неравенств) и/или системой или совокупностью уравнений (неравенств). Грамотное логическое применение равносильных переходов помогает ученику успешно справляться с решением уравнений и неравенств различной сложности.

Зачастую ученик путается в символике, неправильно выполняет равносильные переходы, что приводит к неверному выполнению задания. Помимо разнообразных ошибок вычислительного характера или при решении простейших уравнений и неравенств первой и второй степени, обучающиеся часто допускают логические ошибки [5].

Предлагаем при объяснении тем, связанных с решением заданий с использованием равносильных переходов, проводить аналогию, связующую такие понятия как «конъюнкция-дизъюнкция», «система-совокупность» и «пересечение-объединение». Причем, начинать это нужно с 8 класса, так как именно в этом классе вводятся понятия операций над логическими высказываниями в разделе «Элементы математической логики» на уроках информатики [15, с. 9], а с понятием «система» обучающиеся знакомятся в 7 классе при изучении уравнений, а затем в 8 классе – при изучении уравнений и неравенств [16, с. 40, 41].

Например, при введении понятия «система» учителю необходимо обратить внимание обучающихся на то, что знак системы ставится в случае, когда должны выполняться все заданные условия, то есть мы может между алгебраическими выражения поставить союз «и» (а значит это конъюнкция высказываний). Иногда, в результате решения отдельно взятых уравнений (или неравенств) системы мы получаем их множество корней, но в итоге обязательно нужно найти пересечение полученных множеств. Аналогично, следует поступать при введении понятия «совокупность», только в этом случае выполняется хотя бы одно из данных утверждений, что соответствует союзу «или» (а значит это дизъюнкция высказываний), тогда в итоге требуется найти объединение множеств решений каждого из утверждений [7].

Для более глубокого понимания данного аспекта обучающимися рекомендуется начертить им таблицу (см. табл. 1), проводя аналогии и четко формируя взаимосвязи понятий из разных разделов школьного курса математики [9, с. 62–63].

Если при этом на первых уроках ввести цветовую дифференциацию [2], то ученики несомненно более внимательно и детально будут понимать и воспринимать особенности решения заданий и логически правильно применять равносильные переходы. При этом учитель может предложить обучающимся различные способы введения цветов:

– знакам системы и совокупности присвоить цвета, соответствующие их равносильным операциям [8];

– выбор цветов может происходить в игровой форме;

– дети могут предложить свои цвета;

– учитель может ввести сам цвета, например, знак системы – красным, а совокупности – синим. Опишем самые распространенные случаи применения равносильных переход при решении различных уравнений, неравенств с параметром и без.

Таблица 1 – Соответствие обозначений основных понятий

	Обозначение логической операции	**Обозначение системы или совокупности**	**Обозначение операции над множествами**
оба утверждения	$\wedge$	{	$\cap$
хотя бы одно утверждение	$\vee$	[	$\cup$

Заметим, что в большинстве случаев учащиеся без особых сложностей решают линейные и квадратные уравнения [4]. Однако решение дробно-рациональных уравнений уже вызывают у них некоторые затруднения. Поэтому при их решении необходимо сделать акценты на правильность применения равносильных переходов.

Сначала рассмотрим пример квадратного уравнения:

$$(2x-4)(3+x)=0.$$

Как показывает практика, слабо подготовленный ученик, не умеющий применять равносильные переходы, будет напрямую раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые, приходить к квадратному уравнению, далее искать дискриминант. Несомненно, данная цепочка рассуждений логически верна, но времязатратная для ученика и имеет «подводные камни». У ребенка могут возникнуть трудности при раскрытии скобок, при приведении подобных слагаемых, могут быть допущены вычислительные ошибки, ошибки в формуле дискриминанта и формуле нахождения корней уравнения и пр. Но, если ученик владеет знаниями, когда произведение двух выражений равно нулю, он может выстроить логическую цепочку эквивалентных переходов, которые позволяют избежать перечисленных выше «подводных камней».

Приведем схему решения конкретного уравнения с применением цветовой дифференциации для обучающихся 8 класса (см. табл. 2), опишем логические рассуждения равносильных переходов и представим их математическую запись.

При решении дробно-рациональных уравнений основная ошибка у учеников заключается в том, что, либо они забывают сделать ограничение на знаменатель, либо начинают искать область допустимых значений, а затем про нее забывают и записывают в ответ посторонние корни. В этом случае наиболее эффективным и результативным методом решения является метод равносильных переходов. При изучении данной темы учитель может задавать детям наводящие вопросы, например, «Когда значение дроби равно нулю?», «Какой союз нужно здесь применить?», «Чему не должен равняться x?», «Оба ли корня подходят?» и т.д.

Особенность второго примера (табл. 4) заключается в правильной записи равносильного перехода при нахождении ограничений на знаменатель. Заметим, что произведение двух множителей не равно нулю, когда оба множителя не равны нулю. В этом этапе решения важно обратить внимание детей на то, что при отрицании союз «или» меняется на «и», тогда правильный переход к системе, а не к совокупности.

Таблица 2 – Иллюстрация примера решения квадратного уравнения

Рассуждения	Преобразования уравнения	Алгоритм решения
произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла	$(2x-4)(3+x)=0$	$f(x)g(x)=0$
первый множитель равен нулю **и** второй – существует **или** второй множитель равен нулю **и** первый – существует	$\left[\begin{array}{l}2x-4=0;\\ 3+x=0.\end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=0;\\ g(x)-\text{сущ.};\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)=0;\\ f(x)-\text{сущ.}\end{cases}\end{array}\right.$
решить каждое уравнение	$\left[\begin{array}{l}x=2;\\ x=-3.\end{array}\right.$	A – множество корней $f(x)=0$, B – множество корней $g(x)=0$
записать ответ	Ответ: –3, 2	$A\cup B$

Таблица 3 – Иллюстрация примера решения дробно-рационального уравнения с многочленом первой степени в знаменателе

дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля	$\frac{x^2-8x+15}{x-3}=0$	$\frac{f(x)}{g(x)}=0$
числитель равен нулю **и** знаменатель не равен нулю	$\begin{cases}x^2-8x+15=0;\\ x-3\neq 0.\end{cases}$	$\begin{cases}f(x)=0;\\ g(x)\neq 0.\end{cases}$
решить уравнение и найти ограничения	$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5;\\ x=3;\end{array}\right.\\ x\neq 3.\end{cases}$	A – множество корней $f(x)=0$, B – множество корней $g(x)=0$
отобрать нужные корни и записать ответ	Ответ: 5	$A\backslash B$

Таблица 4 – Иллюстрация примера решения дробно-рационального уравнения с многочленом второй степени в знаменателе

дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля	$\frac{x^2-8x+15}{x^2-9}=0$	$\frac{f(x)}{g(x)}=0$
числитель равен нулю **и** знаменатель не равен нулю	$\begin{cases}x^2-8x+15=0;\\ x^2-9\neq 0.\end{cases}$	$\begin{cases}f(x)=0;\\ g(x)\neq 0.\end{cases}$
решить уравнение и найти ограничения	$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5;\\ x=3;\end{array}\right.\\ \begin{cases}x\neq 3;\\ x\neq -3.\end{cases}\end{cases}$	A – множество корней $f(x)=0$, B – множество корней $g(x)=0$

отобрать нужные корни и записать ответ	Ответ: 5	$A\backslash B$

Основные равносильные переходы для базовых конструкций уравнений и неравенств можно найти в книге М.Я. Выгодского [3]. В статье П.Ф. Севрюкова [13] приведены примеры заданий, которые подтверждают важность изучения методов равносильных переходов, в частности при оформлении развернутых ответов на ОГЭ и ЕГЭ.

Рассмотрим конструкции для уравнений и неравенств, которые, следуя логическим рассуждениям, можно представить в более простой форме. Например, довольно часто в школьном курсе математики встречается иррациональное уравнение, в правой части которого присутствует выражение, содержащее переменную [1]. При решении уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ обучающиеся в большинстве случаев рассуждают следующим образом: возводят обе части уравнения в квадрат, при этом не накладывая никаких ограничений на переменную, решают уравнение и делают проверку найденных корней. Такой метод имеет право на существование и для особенно слабо подготовленного ученика он наиболее подходящий. Однако данные рассуждения имеют ряд недостатков:

– корни уравнения могут оказаться иррациональными числам, что затрудняет их проверку, более того для некоторых школьников трудно подставить и десятичную дробь вместо переменной в уравнение;

– при подстановке чисел в исходное уравнение учащиеся могут допустить вычислительные ошибки, что приведет к приобретению посторонних корней или к потере корня уравнения;

– слабо развивается у обучающихся логика рассуждений при решении уравнения;

– совершенно не подготавливает ученика для решения иррациональных неравенств, ведь метод подстановки там уже не работает.

Для того чтобы не возникали подобные ситуации, описанные выше, следует учить школьников правильным логическим переходам при решении уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Данное уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x); \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Однако заметим, что условие $f(x) \geq 0$ в системе лишнее, так как уравнение $f(x) = g^2(x)$ гарантирует неотрицательность $f(x)$. Если ученик будет решать это лишнее неравенство, то он может допустить вычислительные ошибки, которые, несомненно, повлияют на решение уравнения в целом. Поэтому выгодно применить следующий равносильный переход:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x); \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Такой подход в рассуждениях позволит обучающимся упростить решения уравнения и способствует развитию логического мышления, а в последствии позволит сформировать навык решения трансцендентных неравенств.

Разнообразные задачи, содержащие переменную под знаком модуля, хорошо описал в своей работе П.Ф. Севрюков [14].

Рассмотрим примеры решения неравенств с логарифмом вида $\log_a f(x) > b$ и $\log_a f(x) < b$, где $a \neq 1$ $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$. Самая распространенная ошибка, которую допускают ученики, заключается в том, что многие забывают об основании логарифма и о том, как значение основания a влияет на знак неравенства [10].

Проанализируем как осуществляется равносильный переход при решении неравенств подобного типа.

Если $a > 1$, то искомое неравенство можно заменить равносильной системой неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > a^b; \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Однако заметим, что второе условие $f(x) > 0$ в данной системе будет лишним, в силу того, что первое неравенство гарантирует выполнение положительности подлогарифмического выражения, так как $a^b > 0$ при любом $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$. Таким образом, неравенство $\log_a f(x) > b$ при $a > 1$ равносильно неравенству $\log_a f(x) > b$.

Если $0 < a < 1$, то искомое неравенство можно заменить равносильной системой неравенств:

$$\begin{cases} f(x) < a^b; \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

В этом случае ограничение на подлогарифмическое выражение обязательно, игнорировать его нельзя.

Если искомое неравенство вида $\log_a f(x) < b$, где $a \neq 1$ $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, то рассуждая аналогично можно выполнить следующие равносильные переходы:

если $a > 1$, то $\log_a f(x) < b \Rightarrow \begin{cases} f(x) < a^b; \\ f(x) > 0; \end{cases}$

если $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) < b \Rightarrow \begin{cases} f(x) > a^b; \\ f(x) > 0, \end{cases} \Rightarrow f(x) > a^b.$

При изучении методов решения различных уравнений и неравенств учителю следует акцентировать внимание учеников на равносильных переходах, а также каждый раз следить за правильностью каждого перехода. При решении заданий в классе можно задавать ряд вопросов:

– равносильный ли переход сделан;

– достаточно ли условий в системе или совокупности;

– можно ли сделать проще,

– может какое-то условие избыточное.

В таблице 5 приведем примеры оптимального равносильного перехода некоторых видов неравенств, позволяющих более эффективно и рационально решать неравенства.

Таблица 5 – Равносильные переходы

Вид неравенства	**Равносильный переход**	**Оптимальный равносильный переход**
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x); \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0; \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x); \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0; \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$
$\|f(x)\| \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \leq g(x); \\ f(x) \geq -g(x); \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \leq g(x); \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$
$\|f(x)\| > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x); \\ f(x) < -g(x); \end{array}\right. \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \\ g(x) < 0. \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x); \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

$\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $a > 1$	$\begin{cases} f(x) < g(x); \\ f(x) > 0; \\ g(x) > 0. \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x); \\ f(x) > 0. \end{cases}$
$\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) > g(x); \\ f(x) > 0; \\ g(x) > 0. \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x); \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Рассмотрим, какой равносильный переход можно использовать при решении уравнение с параметром содержащего переменную под знаком модуля. Пример, найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$5|x - 3a| + |x - a^2| + 4x = a$$

1) имеет бесконечное множество решений; 2) не имеет решений.

Подробное решение этого уравнения представлено в книге А.И. Козко, В.С. Парфено, И.Н. Сергеева и др. [6, с. 26]. Мы же сформулируем общий равносильный переход и покажем чему равносильно данное уравнение. Если это уравнение попробовать рассмотреть в общем виде, то можно подметить следующую структуру:

$$A|f(x,a)| + B|g(x,a)| = h(x,a),$$

где A и B – некоторые действительные числа, а $f(x, a)$, $g(x, a)$, $h(x, a)$ – функции, зависящие от переменной x и содержащие параметр a. Тогда это уравнение можно заметить равносильной совокупностью:

$$A|f(x,a)| + B|g(x,a)| = h(x,a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} Af(x,a) + Bg(x,a) = h(x,a); \\ f(x,a) \geq 0; \\ g(x,a) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} Af(x,a) - Bg(x,a) = h(x,a); \\ f(x,a) \geq 0; \\ g(x,a) \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -Af(x,a) + Bg(x,a) = h(x,a); \\ f(x,a) \leq 0; \\ g(x,a) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -Af(x,a) - Bg(x,a) = h(x,a); \\ f(x,a) \leq 0; \\ g(x,a) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Также примеры решения заданий с параметрами, где в ходе их решения осуществляется переход к равносильным системам и совокупностям можно посмотреть в работе Т.В. Павловой [11].

Таким образом, использование цветовой дифференциации, взаимосвязи понятий теории множеств, математической логики и раздела школьного курса математики «Уравнения и неравенства», а также акцентирование внимания школьников на оптимальных равносильных переходах позволяет повысить эффективность обучения.

В ходе апробации результатов исследования был измерен показатель уровня сформированности навыков решения уравнений и неравенств у обучающихся 10–11 классов на базе Муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения города Костромы «Средняя общеобразовательная школа № 30». В данной работе были задействованы 72 обучающихся 10–11 классов школы в период с 2024 по 2025 гг.

Наблюдение проводилось за обучающимися 10-х классов, которые были разделены на контрольную и экспериментальную группы, а в последствии перешли в 11 класс. Перед внедрением разработанных авторами учебных материалов было проведено тестирование, результаты которого показали уровень сформированности навыка решения уравнений и неравенств в 10 А и 10 Б классах. На рисунке 1 синий цвет – средний балл результатов тестирования (по четырехбалльной шкале). Оказалось, что у обучающихся 10 А уровень гораздо ниже, чем у 10 Б. Одной из причин этого является различные профили: 10 А класса – социально-экономический, а 10 Б – технологический. Поэтому было решено, что учащиеся 10 А класса будут заниматься с использованием разработанных учебных материалов, а обучающиеся 10 Б класса – традиционно.

В конце изучения алгебры в обоих классах проводилось итоговое тестирование (контрольная работа, содержащая уравнения и неравенства разного уровня сложности). На рисунке 1 оранжевый цвет – средний балл результатов итогового тестирования.

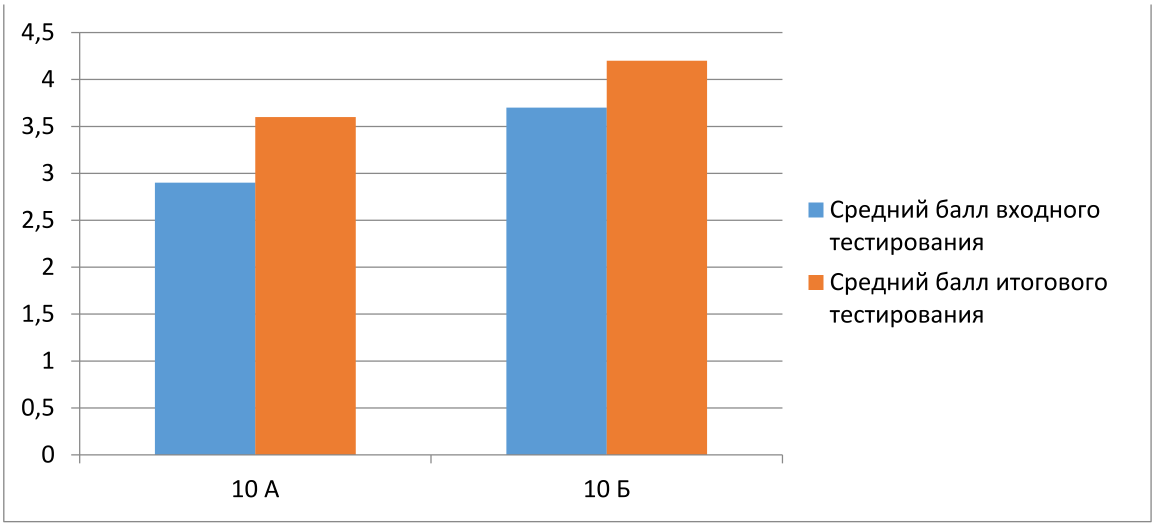

Рисунок 1 – Средний балл работ обучающихся

Можно сделать вывод о том, что при изучении уравнений и неравенств с применением цветовой дифференциации и элементов математической логики уровень сформированности навыка 10 А класса повысился и приблизился к уровню знаний 10 Б класса. Таким образом, разработанные авторами материалы позволяют улучшить понимание у обучающихся о решении уравнений и неравенств, что повлияло на повышение эффективности обучения в классе.

Выводы и заключение. Применение цветовой дифференциации на первых уроках по теме «Уравнения и неравенства» способствует более эффективному формированию навыков решения уравнений и неравенств. Использование взаимосвязей понятий математической логики и теории множеств приводит к развитию умения правильно выполнять равносильные переходы при решении заданий и понимать их смысл. Описанные в работе равносильные переходы способствуют улучшению понимания у обучающихся при решении уравнений и неравенств, что, безусловно, позволяет ему активно включиться в познавательную и исследовательскую деятельность на уроке. Более того, использование оптимальных равносильных переходов при решении примеров позволит сократить время на выполнение задания.

1. *Батуева, К.С. Иррациональные уравнения и неравенства в школьном курсе математики / К.С. Батуева, Н.М. Закирова // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона : периодический межвузовский сборник научно-методических работ. – 2017. – Вып. 19. – С. 204–208.*

2. *Вавилова, С.М. Метод В.Ф. Шаталова – возможности использования в современном образовании / С.М. Вавилова, И.В. Ватутина, О.В. Суховеева // Педагогические и психологические основы оптимизации образовательного процесса в высшей медицинской школе : Материалы научно-практического семинара, Воронеж, 27 февраля 2019 года. – Воронеж : Общество с ограниченной ответственностью "Издательство "Мир науки", 2019. – С. 15–18.*

3. *Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский. – Москва : АСТ, 2025. – 512 с.*

4. *Голубев, А.А. Уравнения и неравенства в школьном курсе математики: учебное посо-*

бие / А.А. Голубев, Т.А. Спасская. – Тверь : Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тверской государственный университет», 2013. – 160 с.

5. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В.А. Гусев. – Москва : ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2003. – 432 с.

6. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи / А.И. Козко, В.С. Парферов, И.Н. Сергеев, В.Г. Чирский. – 2-е изд., стер. – Москва : МЦНМО, 2018. – 232 с.

7. Задворнова, А.С. Использование цветовой дифференциации при изучении элементов математической логики и решение систем и совокупностей уравнений или неравенств / А.С. Задворнова, А.С. Бабенко // Ступени роста – 2024 : материалы 76-й межрегиональной научно-практической конференции молодых ученых, Кострома, 01–22 апреля 2024 года / сост. и отв. ред. Л.А. Исакова. – Кострома : Костромской государственный университет, 2024. – С. 75.

8. Задворнова, А.С. Применение элементов математической логики при изучении понятий системы и совокупности / А.С. Задворнова, А.С. Бабенко, Т.Н Матыцина // Математика и информатика, астрономия, физика, технология и совершенствование их преподавания : материалы научно-методической конференции «Чтения Ушинского», Ярославль, 20–22 марта 2024 года; научн. ред. И.В. Кузнецовой. – Ярославль : РИО ЯГПУ, 2024. – С. 54–61.

9. Малова, И.Е. Проблемы реализации методики формирования понятий / И.Е. Малова, Л.П. Охват. – DOI: 10.24412/2079-9152-2023-57-60-68 // Дидактика математики: проблемы и исследования. – 2023. – Вып. 1(57). – С. 60–68.

10. Мирошниченко, И.Л. Опорные неравенства при решении математических задач / И.Л. Мирошниченко // Психология и педагогика: методология, теория и практика : сборник статей Международной научно-практической конференции, Челябинск, 10 марта 2016 года. – В 2 ч. Ч. 2 – Уфа : АЭТЕРНА, 2016. – С. 39–43.

11. Павлова, Т.В. Создание интерактивных чертежей к заданиям с параметром из профильного ЕГЭ по математике в программе GeoGebra / Т.В. Павлова, Н.П. Камшилов. – DOI: 10.24412/2079-9152-2024-63-54-62 // Дидактика математики: проблемы и исследования. – 2024. – Вып. 3(63). – С. 54–62.

12. Саранцев, Г.И. Методология обучения математике / Г.И. Саранцев. – Саранск : Palmarium Academic Publishing, 2014. – 256 с.

13. Севрюков, П.Ф. О равносильных преобразованиях при решении задач / П.Ф. Севрюков // Математика в школе. – 2022. – № 1. – С. 38– 43.

14. Севрюков, П.Ф. Такие разные задачи с модулями / П.Ф. Севрюков // Математика в школе. – 2014. – № 1. – С. 18–23.

15. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Информатика (базовый уровень) для 7–9 классов образовательных организаций: утв. Институтом стратегии развития образования // Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. – Москва, 2023 : сайт. – URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/15_ФРП-Информатика-7-9-классы_база.pdf (дата обращения: 10.08.2025).

16. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень) для 5–9 классов образовательных организаций: утв. Институтом стратегии развития образования // Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. – Москва, 2023 : сайт. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf (дата обращения: 10.08.2025).

17. Элементарная математика. Иррациональные уравнения и неравенства: учебное пособие / А.В. Фирер, Е.Н. Яковлева, А.П. Елисова, Т.В. Захарова. – Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2021. – 114 с.

18. Bencze, M. Some applications of certain inequalities / M. Bencze, N. Minculete // Octogon. – 2009. – V. 17, No. 1. – P. 199–208.

19. Halmaghi, E. Undegraduate students' conceptions of inequalities / E. Halmaghi // Thesis Sub-mitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Phi-losophy, 2011.

THE USE OF EQUIVALENT TRANSFORMS IN SOLVING VARIOUS EQUATIONS AND INEQUALITIES AT SCHOOL

Babenko Alena Sergeevna[1],
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Matycina Tatyana Nikolaevna[1],
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Zadvornova Alisa Sergeevna[2],
[1]Kostroma State University
Kostroma, Russian Federation
[2]Secondary School No. 30,
Kostroma, Russian Federation

Abstract. *This paper presents a variety of equivalent transitions for solving standard equations and inequalities in the school mathematics curriculum. It describes techniques for teaching methods for solving equations and inequalities, including the use of color differentiation, establishing the relationship between the concepts of set theory, mathematical logic, and the concept of "system-set," and provides recommendations for teachers on the use of equivalent transitions in the classroom. The paper presents the basic equivalent transitions that can be used to solve equations and inequalities, as well as problems of increased complexity – tasks with a parameter. Effective ways of applying equivalent transitions are demonstrated, which in some cases allow for the elimination of redundant conditions, thereby simplifying the solution and reducing the time required to complete the task, which undoubtedly reduces the number of "stray" errors made by schoolchildren. The results of a pilot study on the implementation of the developed teaching materials in the educational process are described. The study was conducted in grades 10 and 11 over a period of two years, the purpose of which was to assess the level of development of the ability to solve equations and inequalities in students. Based on the results of the entrance and final testing of students, conclusions were drawn about increasing the effectiveness of learning in the classroom.*

Keywords*: equations, inequalities, mathematical logic, set theory, color differentiation, optimal equivalent transformation.*

For citation: Babenko A., Matytsina T., Zadvornova A. (2025). Using equivalent transitions in solving equations and inequalities at school. Didactics of Mathematics: Problems and Investigations. No. 4(68), pp. 61–71. (In Russ., abstract in Eng.). – DOI: 10.24412/2079-9152-2025-68-61-71. – EDN WPCOXF.

Статья представлена профессором Е.И. Скафой.
Поступила в редакцию 30.09.2025.